02.12.2023

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ FEN FAKÜLTESİ MATEMATİK BÖLÜMÜ

2023-2024 EĞİTİM ÖĞRETİM YILI MAT 101 ANALİZ I ARASINAV SORULARI

1) X ve Y reel sayılar kümesinin iki sınırlı alt kümesi ve $X \subset Y$ olsun. Bu durumda $\sup X \le \sup Y$ olduğunu gösteriniz. (10 puan)

2) $A=\left\{x\in\mathbb{R}:\dfrac{x^2-x+5}{x}\ge 5\right\}\cap(0,1]$ kümesinin varsa supremum, infimum, maksimum ve minimum değerlerini bulunuz. (10 puan)

3) Her $n\in\mathbb{N}$ için $4^{n+1}>(n+2)^2$ eşitsizliğinin sağlandığını tümevarım prensibini kullanarak gösteriniz. (10 puan)

4) $\beta_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:[\![x]\!]=y\}$ ve $\beta_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:[\![y]\!]=x\}$ bağıntıları birer fonksiyon belirtir mi? Açıklayınız. (10 puan)

5) $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) & , \quad 0\le x<\dfrac{\pi}{2}\\ |2x-\pi|+\pi & , \quad \dfrac{\pi}{2}\le x<\pi\\ [\![x+1]\!] & , \quad \pi\le x<4\end{cases}$ fonksiyonunun $[0,4)$ aralığında grafiğini çiziniz, sabit ve monoton olduğu aralıkları belirleyiniz. (15 puan)

6) $2\cos^2 x-5\cos x+2=0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz. (10 puan)

7) $\operatorname{arccot}\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\arccos\left(\dfrac{-1}{2}\right)+\arctan(-1)$ ifadesinin değerini bulunuz. (10 puan)

8) $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x-|x|}.\log_{(2x+1)}\left(\sqrt{x}\right)^5}{1-\operatorname{sgn}(x-9)}+\dfrac{\sin^3\left(x^3\right)-e^{\arctan\frac{1}{x-2}}}{\pi+\arccos\dfrac{7}{x}}$ ile tanımlı f fonksiyonunun en geniş tanım kümesini bulunuz. (15 puan)

9) $a_n=\dfrac{n}{2n-1}$ olmak üzere (a_n) dizisinin $\dfrac{1}{2}$ sayısına yakınsadığını tanımı kullanarak gösteriniz. (10 puan).

Not: Sınav süresi 100 dakikadır.

Başarılar...
Doç. Dr. Nilay DEĞİRMEN

ANALİZ I ARASINAV CEVAP ANAHTARI

1-) $\forall x \in X$ alalım. $X \subset Y$ olduğundan $x \in Y$ dir. Bu durumda $x \leq \sup Y$ olur. Bu eşitsizlik $\forall x \in X$ için sağlandığından $\sup Y$, X kümesi için bir üst sınırdır. Ancak X in en küçük üst sınırı $\sup X$ olduğundan $\sup X \leq \sup Y$ olmak zorundadır.

2-) $A = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x^2-x+5}{x} \geq 5\right\} \cap (0,1]$

$$\frac{x^2-x+5}{x} \geq 5 \Rightarrow \frac{x^2-x+5}{x} - 5 \geq 0 \Rightarrow \frac{x^2-6x+5}{x} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(x-1)(x-5)}{x} \geq 0$$ Kritik noktalar: $x=0, x=1, x=5$

x	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … 5	5 … ∞
x^2-6x+5	+	+	−	+
x	−	+	+	+
$\frac{x^2-6x+5}{x}$	−	+	−	+

$\frac{x^2-6x+5}{x} \geq 0$ eşitsizliğinin çözüm kümesi $(0,1] \cup [5,\infty)$ dur. Bu durumda $A = (0,1]$ olur.

$\min A$ yoktur, $\max A = 1$, $\inf A = 0$, $\sup A = 1$ dir.

3-) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $4^{n+1} > (n+2)^2$ mi?

$n=1$ için $4^2 > 3^2$ sağlanır.

$n=k$ için eşitsizlik doğru olsun, yani $\boxed{4^{k+1} > (k+2)^2}\ (*)$ olsun.

$n=k+1$ için doğru mu? Yani $4^{k+2} > (k+3)^2$ mi?

$$4^{k+2} = 4^{k+1} \cdot 4 \underset{(*)}{>} (k+2)^2 \cdot 4 = (k^2+4k+4) \cdot 4$$
$$= 4k^2+16k+16$$
$$> k^2+6k+9$$
$$= (k+3)^2$$

olduğundan $4^{k+2} > (k+3)^2$ dir.

Dolayısıyla tümevarım prensibi ile verilen eşitsizliğin doğruluğu ispatlanmış olur.

4-) $\beta_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : [\![x]\!] = y\}$ için tanım kümesinde boşta eleman kalmıyor ve tanım kümesindeki her elemanın yalnız bir görüntüsü var. Dolayısıyla β_1 bir fonksiyondur.

$\beta_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : [\![y]\!] = x\}$ için $(1,1), (1,\frac{3}{2}) \in \beta_2$ dir. yani 1 elemanının en az 2 görüntüsü vardır. Dolayısıyla β_2 bir fonksiyon değildir.

5-) $f(x) = \begin{cases} \text{sgn}(x-\frac{\pi}{2}) , & 0 \leq x < \frac{\pi}{2} \\ |2x-\pi| + \pi , & \frac{\pi}{2} \leq x < \pi \\ [|x+1|] , & \pi \leq x < 4 \end{cases}$

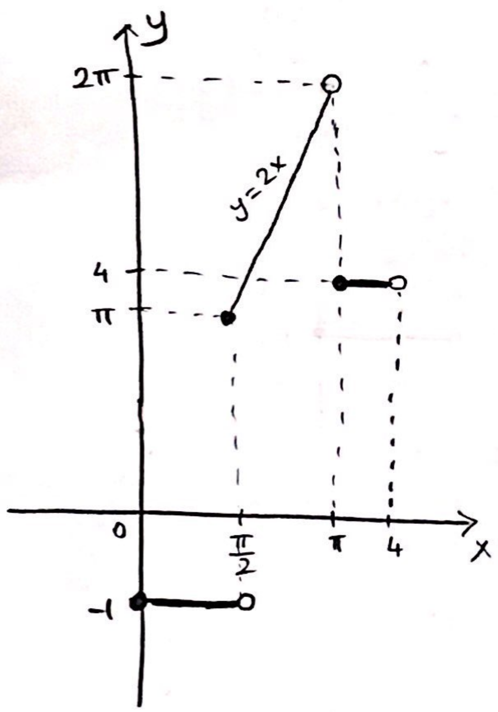
$0 \leq x < \frac{\pi}{2}$ için $-\frac{\pi}{2} \leq x - \frac{\pi}{2} < 0$ olduğundan

$\text{sgn}(x-\frac{\pi}{2}) = -1$ dir.

$\frac{\pi}{2} \leq x < \pi$ için $\pi \leq 2x < 2\pi$ olup $2x - \pi \geqslant 0$ dır.

Dolayısıyla $|2x-\pi| + \pi = 2x - \pi + \pi = 2x$ olur.

$\pi \leq x < 4$ için $\pi + 1 \leq x+1 < 5$ olup $[|x+1|] = 4$ dür.



Fonsiyon $[0, \frac{\pi}{2})$ ve $[\pi, 4)$ aralıklarında sabit, $[\frac{\pi}{2}, \pi)$ aralığında artandır.

6-) $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \overset{\cos x = u}{\Longrightarrow} 2u^2 - 5u + 2 = 0$

$\Rightarrow (u-2)(2u-1) = 0$

$\Rightarrow u = 2$ veya $u = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \cancel{\cos x = 2}$ veya $\cos x = \frac{1}{2}$

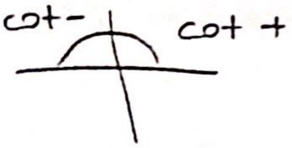
$\cos x \in [-1, 1]$ olduğundan $\cos x = 2$ olamaz.

$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ veya $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$Ç.K. = \{ \frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \} \cup \{ -\frac{\pi}{3} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$

7-) $\underbrace{\operatorname{arccot} \frac{1}{\sqrt{3}}}_{\alpha} + \underbrace{\arccos \frac{-1}{2}}_{\beta} + \underbrace{\arctan(-1)}_{\gamma}$

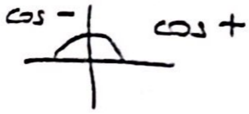
$\cot\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\operatorname{arccot}: \mathbb{R} \to (0, \pi)$



α, 1. bölgede

$\alpha = \frac{\pi}{3}$

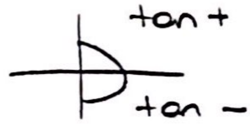
$\cos\beta = -\frac{1}{2}$, $\arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$



β, 2. bölgede

$\beta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

$\tan\gamma = -1$, $\arctan: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



γ, 4. bölgede

$\gamma = -\frac{\pi}{4}$

$\alpha + \beta + \gamma = \frac{3\pi}{4}$

8-) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x - |x|}\ \log_{2x+1} (\sqrt{x})^5}{1 - \operatorname{sgn}(x-9)} + \dfrac{\sin^3(x^3) - e^{\arctan \frac{1}{x-2}}}{\pi + \arccos \frac{7}{x}}$

$D_f = \{ x \in \mathbb{R} : 2x+1 > 0,\ 2x+1 \neq 1,\ x > 0,\ \operatorname{sgn}(x-9) \neq 1,\ x-2 \neq 0,\ \frac{7}{x} \in [-1,1], x \neq$

$2x+1 > 0 \Rightarrow x > -\frac{1}{2}$

$2x+1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 0$

$x > 0$

$\operatorname{sgn}(x-9) \neq 1 \Rightarrow x - 9 \leq 0 \Rightarrow x \leq 9$

$x - 2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

$\frac{7}{x} \in [-1,1] \Rightarrow -1 \leq \frac{7}{x} \leq 1 \overset{x>0}{\Rightarrow} -x \leq 7 \leq x \Rightarrow x \geq 7$ ve $x \geq -7$

$x \neq 0$

Bu durumların hepsini sağlayan x lerin en geniş kümesi $[7, 9]$ kapalı aralığıdır, yani $D_f = [7, 9]$ dur.

9-) $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$ mi? Yani $\forall \varepsilon > 0$ verildiğinde $\forall n > n_0$

olduğunda $\left|\frac{n}{2n-1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$ olacak şekilde $n_0 \in \mathbb{N}$ var mı?

$$\left|\underset{(2)}{\frac{n}{2n-1}} - \underset{(2n-1)}{\frac{1}{2}}\right| = \left|\frac{2n-2n+1}{2(2n-1)}\right| = \frac{1}{2(2n-1)} \leq \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2n_0} < \varepsilon$$

$2n_0 > \frac{1}{\varepsilon}$

$n_0 > \frac{1}{2\varepsilon}$

$n_0 = \left[\!\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]\!\right] + 1 \in \mathbb{N}$

(*) $2n-1 \geq n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2n-1} \leq \frac{1}{n}$$